第 4 章　微分法の応用

4.1　導関数の応用

4.1.1　接線の方程式

A 曲線 $y = f(x)$ の接線

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい.
したがって，次のことが成り立つ.

接線の方程式

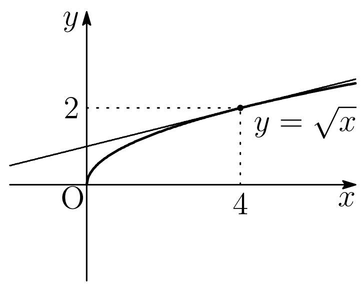
曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

例題 4.1 次の曲線上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ.

$$y = \sqrt{x}$$

【解】 $f(x) = \sqrt{x}$ とすると



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

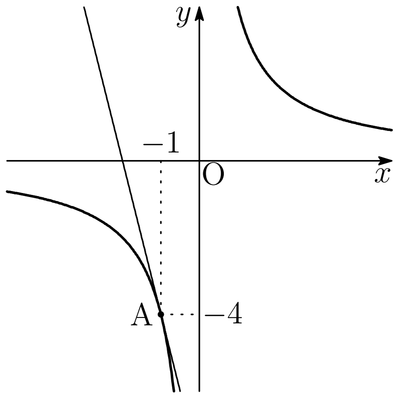
であるから　　$f'(4) = \dfrac{1}{4}$

よって，点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式は

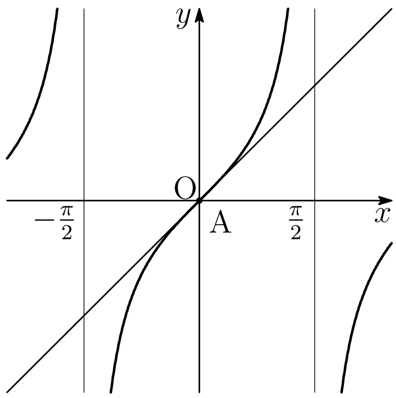
$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{1}{4}x + 1$$

練習 4.1 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ.

(1) $y = \dfrac{4}{x}$, A$(-1, -4)$



(2) $y = \tan x$, A$(0, 0)$



応用例題 4.1 曲線 $y=\log x$ について，次のような接線の方程式を求めよ．

(1) 傾きが e である　　(2) 原点を通る

考え方 接点の座標を $(a,\ \log a)$ として，この点における接線の方程式を作り，条件を満たすように a の値を定める．

【解】 $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ \log a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a) \qquad \cdots ①$$

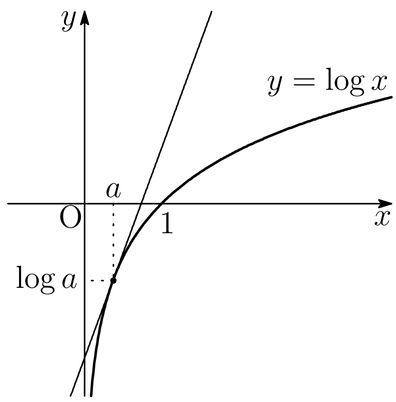
(1) 接線 ① の傾きが e であるから

$$\frac{1}{a}=e \quad すなわち \quad a=\frac{1}{e}$$

① に代入すると

$$y-\log\frac{1}{e}=e\left(x-\frac{1}{e}\right)$$

整理して　$y=ex-2$



(2) 接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$$0-\log a=\frac{1}{a}(0-a)$$

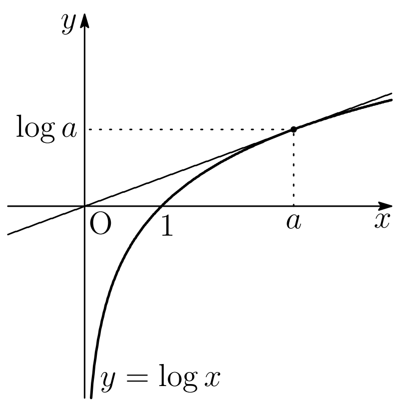
よって　$\log a=1$

ゆえに　$a=e$

① に代入すると

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$$

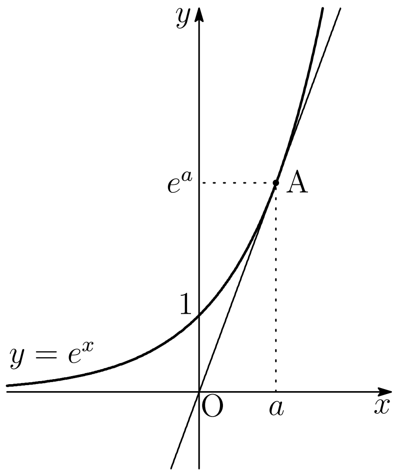
整理して　$y=\dfrac{1}{e}x$



練習 4.2 曲線 $y = e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ．

(1) 傾きが 1 である

(2) 原点を通る



B 曲線の方程式と接線

曲線が x，y の方程式で表されている場合には，y を x の関数とみて，方程式を x で微分して導関数 y' を求めればよい.

例 4.1 円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(\sqrt{3},\ 1)$ における接線の傾き m

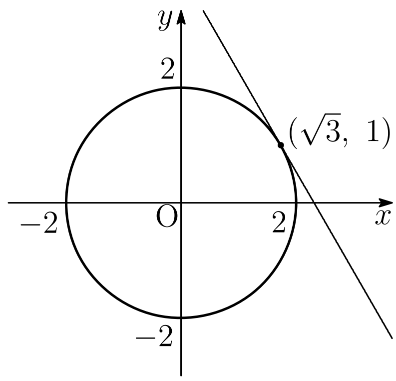
$x^2+y^2=4$ の両辺を x で微分すると

$$2x+2yy'=0$$

よって，$y \neq 0$ のとき　$y'=-\dfrac{x}{y}$

$x=\sqrt{3}$，$y=1$ を代入して

$$m=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$



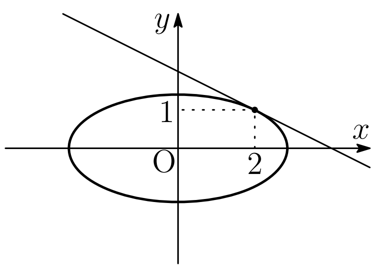
例題 4.2 楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ.

【解】 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{8}+\frac{2yy'}{2}=0$$

ゆえに，$y \neq 0$ のとき

$$y'=-\frac{x}{4y}$$



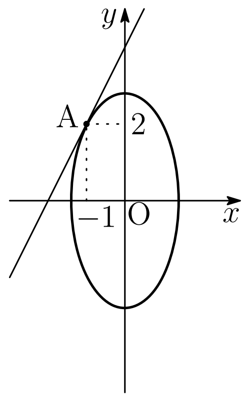
よって，点 $(2,\ 1)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{2}{4\cdot 1}=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

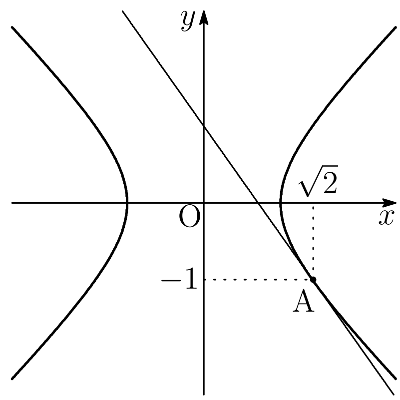
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2) \qquad \text{すなわち} \qquad y=-\frac{1}{2}x+2$$

練習 4.3 次の方程式で表される曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ．

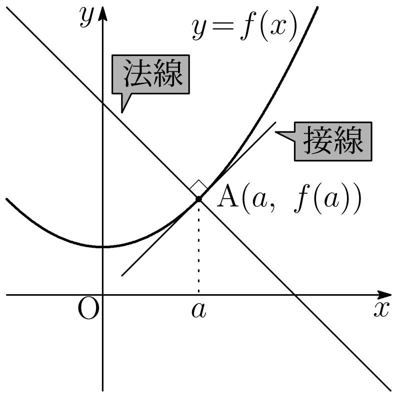
(1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，A$(-1,\ 2)$



(2) $x^2-y^2=1$，A$(\sqrt{2},-1)$



C 法線の方程式



曲線上の点 A を通り，A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を，点 A におけるこの曲線の**法線**という.

曲線 $y=f(x)$ 上の点 A$(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しいから，$f'(a)\neq 0$ のとき，点 A における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である.

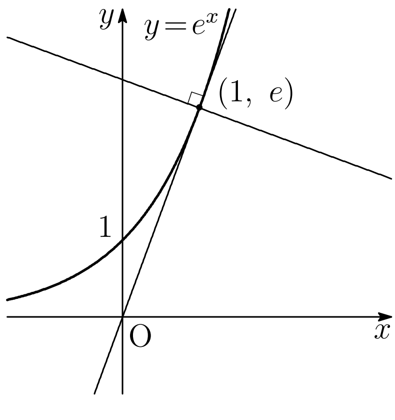
したがって，次のことが成り立つ.

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$f'(a)\neq 0$ のとき　　$\boldsymbol{y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)}$

[注意] $f'(a)=0$ のとき，法線の方程式は $x=a$ である.

例 4.2 曲線 $y=e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における法線の方程式



$f(x)=e^x$ とすると

$$f'(x)=e^x$$

よって　　$f'(1)=e$

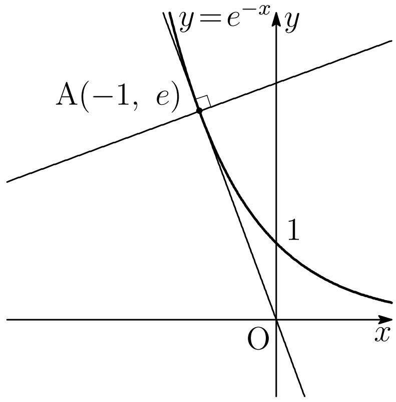
したがって，この法線の方程式は

$$y-e=-\frac{1}{e}(x-1)$$

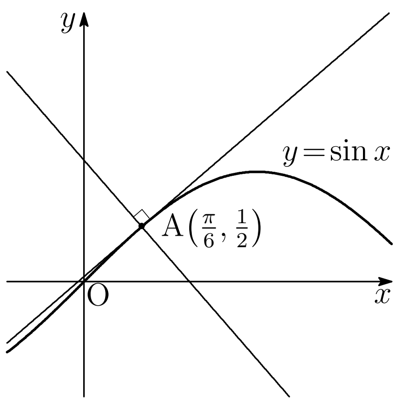
すなわち　　$y=-\dfrac{1}{e}x+e+\dfrac{1}{e}$

練習 4.4 次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ.

(1) $y = e^{-x}$, A$(-1,\ e)$



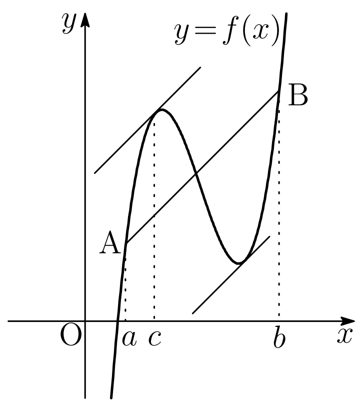
(2) $y = \sin x$, A$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$



4.1.2　平均値の定理

A 平均値の定理

$f(x)$ が連続関数のとき，$y = f(x)$ の グラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとって，直線 AB と平行な接線を考えてみよう．



$f(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，このグラフ上の A，B 間の点における接線で，直線 AB と平行なものが少なくとも 1 本存在することが知られている．直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．また，接点の x 座標を c とすると，接線の傾きは $f'(c)$ である．したがって，次のことが成り立つ．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

一般に，次の**平均値の定理**が成り立つ．

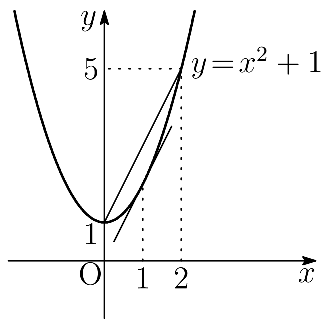
平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b}$$

を満たす c が存在する．

例 4.3　$f(x) = x^2+1$ は，区間 $[0,\ 2]$ で連続で，区間 $(0,\ 2)$ で微分可能である．

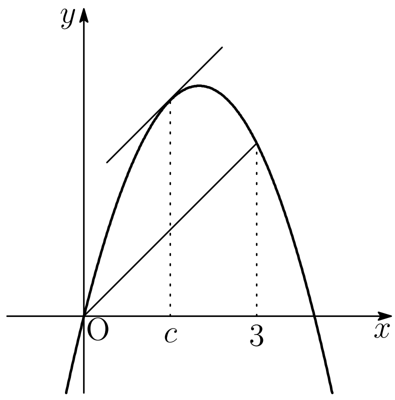


$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{5-1}{2} = 2$$
$$f'(c) = 2c$$

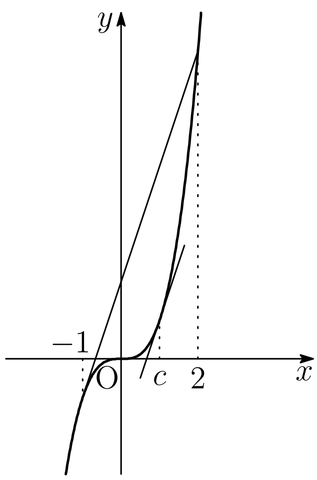
よって，$2c = 2$ から　$c = 1$

練習 4.5 次の各場合に，前ページの平均値の定理における c の値を求めよ.

(1) $f(x) = -x^2 + 4x$，$a = 0$，$b = 3$



(2) $f(x) = x^3$，$a = -1$，$b = 2$



B 不等式への応用

平均値の定理を利用して，不等式を証明できる場合がある．

応用例題 4.2 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ．

$$a > 0 \text{ のとき} \qquad \frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$

考え方　$\log(a+1) - \log a = \dfrac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a}$ と変形できるから，
関数 $f(x) = \log x$ に平均値の定理を用いる．

[証明] 関数 $f(x) = \log x$ は，$x > 0$ で微分可能で

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

区間 $[a,\ a+1]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = \frac{1}{c} \quad \cdots ①$$

$$a < c < a+1 \quad \cdots ②$$

を同時に満たす c が存在する．

$a > 0$ であるから，② より　$\dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$

よって，① により　$\dfrac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \dfrac{1}{a}$　**[証終]**

練習 4.6 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ．

$$a < b \text{ のとき} \qquad e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

4.1.3 関数の値の変化

A 関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，平均値の定理から，関数の増減[1] について次のことが成り立つ．

導関数の符号と関数の増減

1　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する．

2　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する．

3　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，
$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である．

[1 の証明] 区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\quad x_1 < c < x_2$$

を満たす c がとれる．

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，x_1，x_2 のとり方によらず，常に $f'(c) > 0$ となる．ここで，$x_2 - x_1 > 0$ であるから，

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{すなわち} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つ．よって，**1** が成り立つ．　**[証終]**

[1] 区間 I に含まれる任意の 2 数 x_1，x_2 について,「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$」が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 I で増加する．「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 I で減少する．

練習 4.7 前ページの **2**，**3** を証明せよ．

前ページの **3** を用いると，次のことが導かれる．

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $(a,\ b)$ でともに微分可能で，常に $g'(x) = f'(x)$ ならば，$f(x)$，$g(x)$ には次の関係がある．

区間 $[a,\ b]$ で　　$g(x) = f(x) + C$　　ただし，C は定数

練習 4.8 上のことを証明せよ．

導関数 $f'(x)$ の符号を調べて，関数 $f(x)$ の増減を調べてみよう．

例題 4.3 次の関数の増減を調べよ．

$$f(x) = x - 2\sqrt{x}$$

【解】 $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$ である．

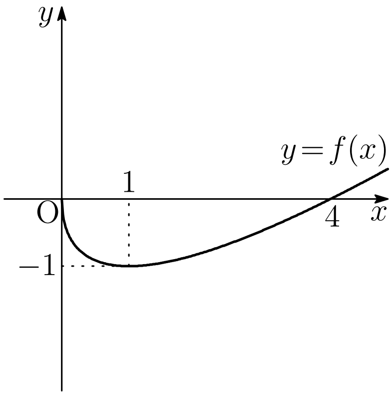
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

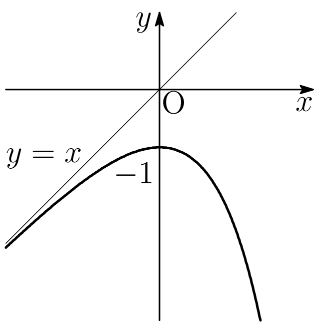


したがって，$f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で減少，$1 \leqq x$ で増加する．

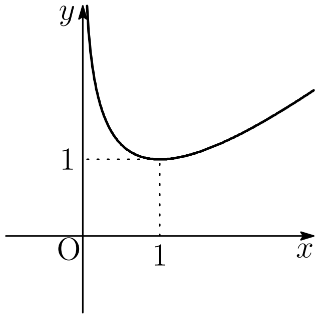
[注意] 増減する区間を示すときは，区間の端も含めておく．

練習 4.9 次の関数の増減を調べよ．

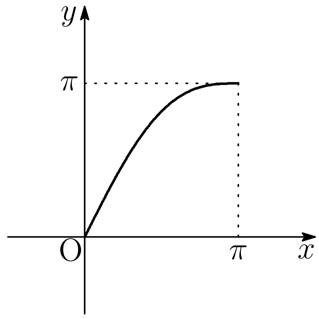
(1) $f(x) = x - e^x$



(2) $f(x) = x - \log x$

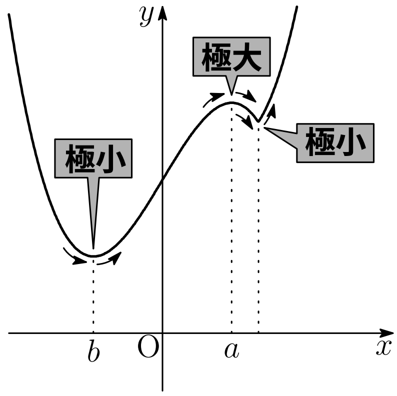


(3) $f(x) = x + \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$



B 関数の極大と極小

連続な関数 $f(x)$ が，$x = a$ を境目として，増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x = a$ で**極大**であるといい，関数の値 $f(a)$ を**極大値**という．
関数 $f(x)$ が，$x = b$ を境目として減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x = b$ で**極小**であるといい，関数の値 $f(b)$ を**極小値**という．極大値と極小値をまとめて**極値**という．



関数 $f(x)$ が極値をとるための必要条件として，次が成り立つことが知られている．

極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとり，かつ $x = a$ で微分可能ならば，
$f'(a) = 0$ である．

したがって，関数 $f(x)$ の極値を求めるとき，$f'(a) = 0$ であるならば，$x = a$ の前後における $f'(x)$ の符号を調べればよい．
たとえば，次のような場合は，$x = a$ で極値をとる．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

なお，$f'(a) = 0$ であっても，$x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらなければ，$f(a)$ は極値ではない．すなわち，次のことがいえる[2]．

$f'(a) = 0$ であっても，$f(a)$ が極値であるとは限らない．

[2] 160 ページの例 4.6(2) を参照.

例題 4.4 次の関数の極値を求めよ．

(1)　$f(x) = xe^{-x}$　　　　(2)　$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

【解】 (1)　$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．　　$\longleftarrow e^{-x} > 0$ に注意

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

$\longleftarrow f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

よって，極大値は $f(1) = \dfrac{1}{e}$，極小値はない．

(2)　定義域は $x \neq 0$ である．

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = -2,\ 2$

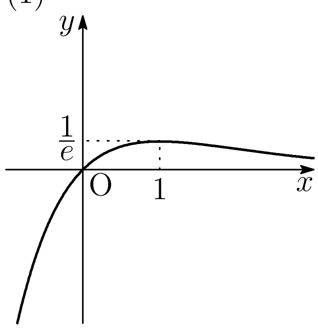
$f(x)$ の増減表は次のようになる．　　$\longleftarrow x^2 > 0$ に注意

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 -4	$\searrow$		$\searrow$	極小 4	$\nearrow$

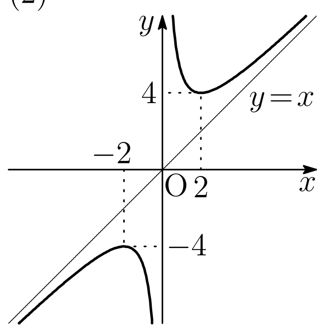
よって，極大値は $f(-2) = -4$，極小値は $f(2) = 4$ である．

[注意] 例題 4.4 の各関数のグラフは，次のようになる．

(1)

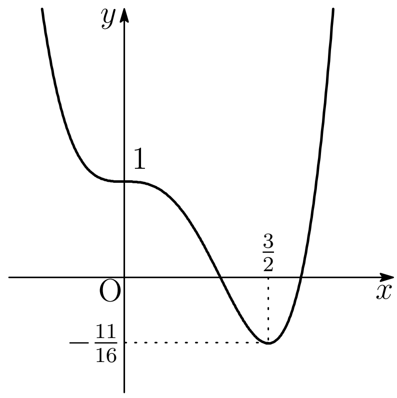


(2)

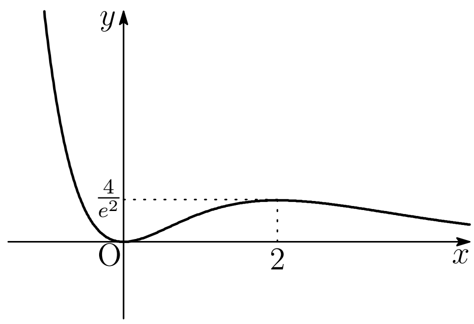


練習 4.10 次の関数の極値を求めよ．

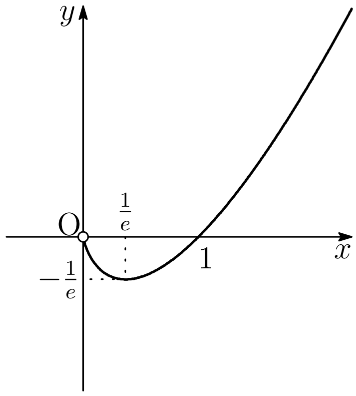
(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$



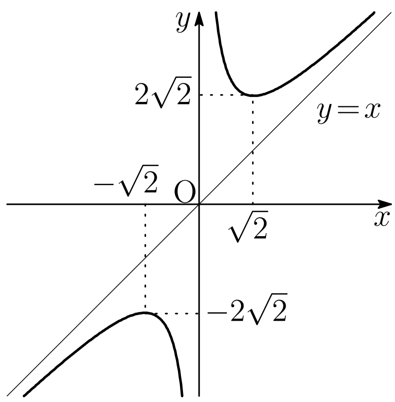
(2) $f(x) = x^2 e^{-x}$



(3) $f(x) = x \log x$



(4) $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$



関数 $f(x)$ について，$x = a$ で微分可能でなくても，$x = a$ で極値をとることがある．

応用例題 4.3 次の関数の極値を求めよ．

$$f(x) = |x|\sqrt{x+1}$$

考え方 $x \geqq 0$ のとき $|x| = x$，$x < 0$ のとき $|x| = -x$ である．
それぞれの区間で導関数の符号を調べ，増減表を作る．

【解】 この関数の定義域は，$x \geqq -1$ である．

$x \geqq 0$ のとき　　$f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

よって，$x > 0$ では，常に　　$f'(x) > 0$

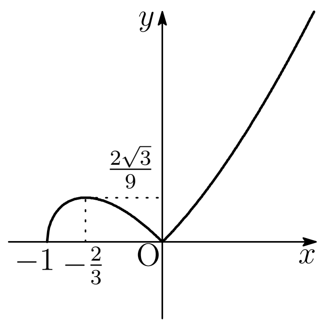
$-1 \leqq x < 0$ のとき　　$f(x) = -x\sqrt{x+1}$

$$f'(x) = -\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$f'(x) = 0$ となる x の値を求めると　$x = -\dfrac{2}{3}$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

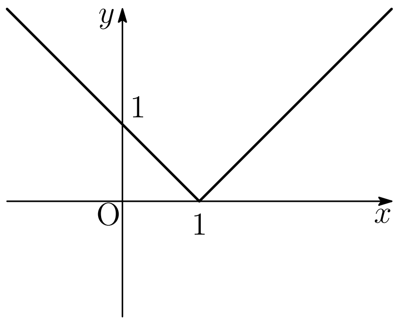
x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗



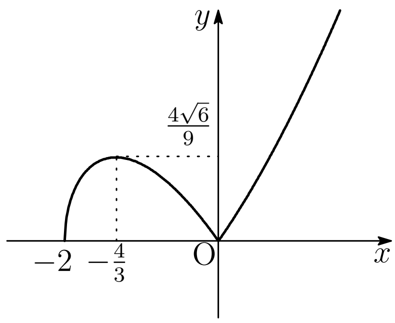
よって，極大値は $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，極小値は $f(0) = 0$ である．

練習 4.11 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x) = |x - 1|$



(2) $f(x) = |x|\sqrt{x+2}$



応用例題 4.4 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-1}$ が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

考え方　$x=-1$ で極値をとるので，$f'(-1)=0$ から a の値の候補を求めて，増減表で確認する．

【解】
$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+a)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば
$$f'(-1)=0$$
すなわち
$$\frac{2-a}{4}=0$$
$\longleftarrow f'(-1)=\frac{2-a}{4}$

これを解くと，$a=2$ となる．このとき
$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．　$\longleftarrow (x-1)^2>0$ に注意

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 -1	$\searrow$	/	$\searrow$	極小 7	$\nearrow$

ゆえに，$a=2$ のとき，$x=-1$ で確かに極値をとる．
このとき，極大値は $f(-1)=-1$，極小値は $f(3)=7$ である．

(答) $a=2$，極大値 -1，極小値 7

練習 4.12 関数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ．また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

C 関数の最大と最小

増減を利用して，関数の最大値，最小値を求めてみよう．

例題 4.5 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$y = \cos^2 x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

【解】
$$\begin{aligned} y' &= 2\cos x \cdot (-\sin x) + 2\cos x \\ &= 2\cos x(1 - \sin x) \end{aligned}$$

$0 < x < 2\pi$ で $y' = 0$ となる x の値は

$$\cos x = 0 \quad \text{または} \quad \sin x = 1$$

$\longleftarrow \cos x = 0$ から

$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x = 1$ から

$x = \dfrac{\pi}{2}$

より

$$x = \frac{\pi}{2},\quad \frac{3}{2}\pi$$

ゆえに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における y の増減表は

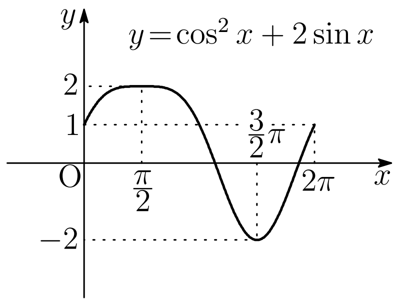
x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗	1

したがって，y は

$x = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 2,

$x = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -2

をとる．



練習 4.13 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = (1 + \cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

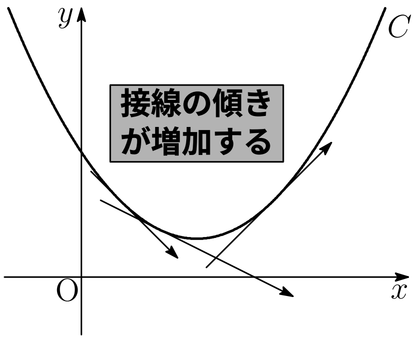
(2) $y = \dfrac{4 - 3x}{x^2 + 1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

4.1.4　関数のグラフ

A 曲線の凹凸

関数 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ の正負が何を表すか調べてみよう．

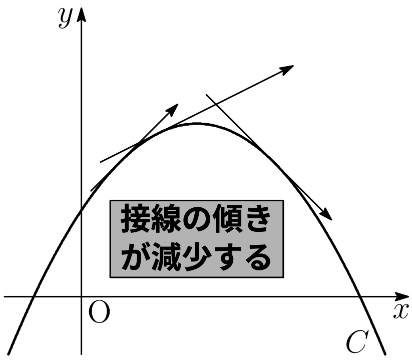
関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする．$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は $f''(x)$ の符号で調べることができる．また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す．



よって，次のことがいえる．

$f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値は増加する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する．

$f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する．すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する．



一般に，ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で**下に凸**であるという．また，接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で**上に凸**であるという．

上で調べたことをまとめると，次のことがいえる．

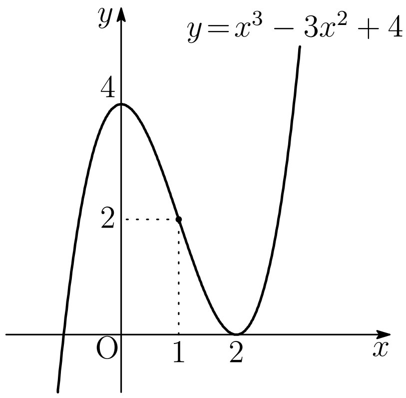
$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

$f(x)$ が第2次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1　$f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である．

2　$f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である．

例 4.4 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の凹凸



$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$$

y'' の符号を調べて，この曲線の凹凸は，次のようになる．

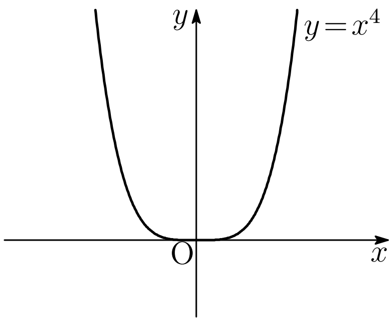
x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸

例 4.4 の曲線では，図からわかるように，点 (1, 2) を境目として曲線の凹凸が入れ替わっている．このように，曲線の凹凸が入れ替わる境目の点を**変曲点**という．変曲点については，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ の変曲点

$f''(a) = 0$ のとき，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，
点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点である．

なお，$f''(a) = 0$ であっても，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点でない場合もある．たとえば，$f(x) = x^4$ について

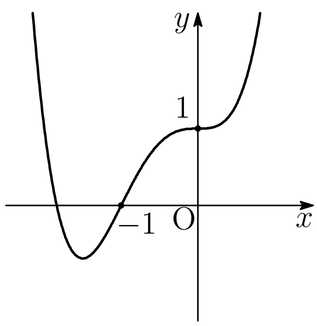


$$f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2$$

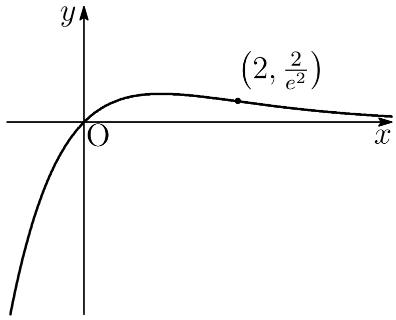
で，$f''(0) = 0$ であるが，$x = 0$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わらない．
したがって，原点 (0, 0) は曲線 $y = x^4$ の変曲点ではない．

練習 4.14 次の曲線の凹凸を調べよ．また，変曲点があればその座標を求めよ．

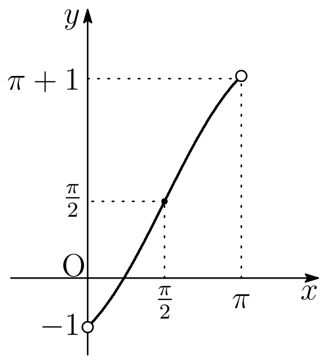
(1) $y = x^4 + 2x^3 + 1$



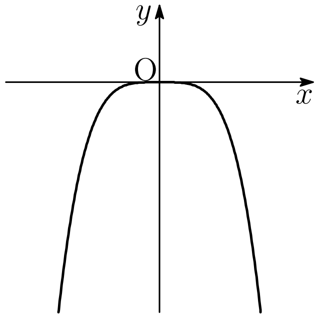
(2) $y = xe^{-x}$



(3) $y = x - \cos x \ (0 < x < \pi)$



(4) $y = -x^4$



B グラフのかき方

例題 4.6 関数 $y = e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，変曲点，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ．

【解】

$$y' = -4xe^{-2x^2}$$

$$y'' = -4\{e^{-2x^2} + x(-4xe^{-2x^2})\} = 4(4x^2-1)e^{-2x^2}$$

$y' = 0$ となる x は　　$x = 0$

$y'' = 0$ となる x は　　$x = \pm\dfrac{1}{2}$

よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

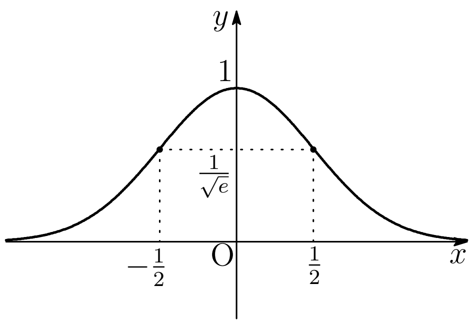
変曲点は，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ である．

また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = 0$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である．

さらに，グラフは y 軸について対称である．

以上から，この関数のグラフの概形は，右の図のようになる．



[注意] 上の表において，↗ は下に凸で増加，↗ は上に凸で増加，↘ は上に凸で減少，↘ は下に凸で減少であることを示している．

例題 4.7 関数 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ.

【解】 $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ であるから

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

よって，増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 0	↘		↘	極小 4	↗

また，　$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} y = -\infty$,　$\displaystyle\lim_{x \to 1+0} y = \infty$

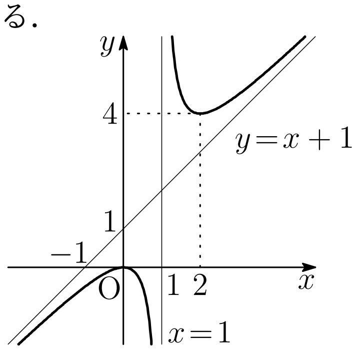
であるから，直線 $x = 1$ はこの曲線の漸近線である.

さらに，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \{y - (x+1)\} = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \{y - (x+1)\} = 0$

であるから，直線 $y = x + 1$ もこの曲線の漸近線である.

以上から，このグラフの概形は，右の図のようになる.



[注意] 関数の式を $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ と変形しているのは，y'' の計算が簡単になるのと，漸近線の方程式を求めるためである.

練習 4.15 次の関数のグラフの概形をかけ.

(1) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(2) $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$

(3) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

C 第 2 次導関数と極値

関数 $f(x)$ の極値を判定するのに，第 2 次導関数 $f''(x)$ を利用する方法がある．$f''(x)$ が連続関数であるとき，次のことが成り立つ．

第 2 次導関数と極限

1　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば，$f(a)$ は極小値である．

2　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば，$f(a)$ は極大値である．

[1 の証明]　$f''(a)>0$ のとき，a に十分近い x では $f''(x)>0$ となり，

$f'(x)$ は増加する．

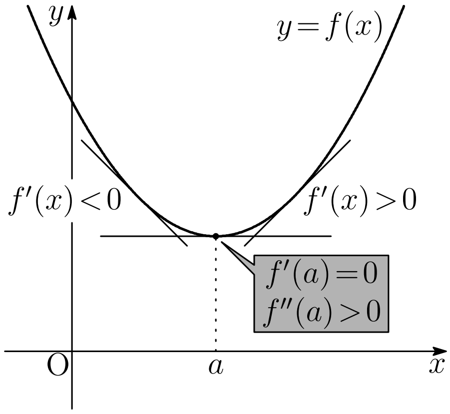
ここで，$f'(a)=0$ であるから，

$x<a$ では　$f'(x)<0$

$x>a$ では　$f'(x)>0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	↘	極小	↗

よって，このとき $f(a)$ は極小値である．



[証終]

2 についても，同様にして証明することができる．

例 4.5　関数 $f(x)=-x^3+3x$ の極限

$f'(x)=-3x^2+3$，$f''(x)=-6x$

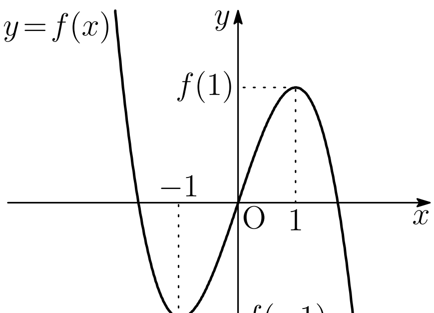
$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=-1,\ 1$$

$f''(-1)=6>0$，$f''(1)=-6<0$

であるから，

$f(-1)$ が極小値，$f(1)$ が極大値



例題 4.8 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ．

$$f(x) = x + 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

【解】

$$f'(x) = 1 - 2\sin x$$
$$f''(x) = -2\cos x$$

$0 < x < \pi$ において，$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

$\longleftarrow \sin x = \frac{1}{2}$ の解

ここで　$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$，$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$

よって，極値は次のようになる．

極大値は $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$，極小値は $f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$

練習 4.16 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ．

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

(2) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

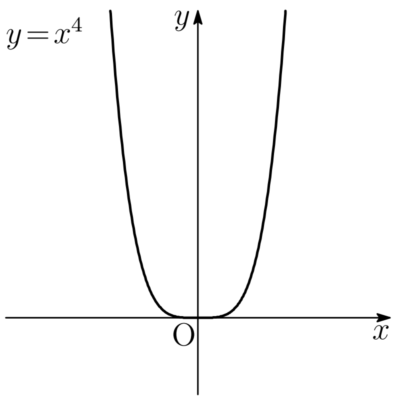
関数 $f(x)$ について，$f'(a) = 0$，$f''(a) = 0$ であるときは，$f(a)$ は極値となることもあるし，極値とならないこともある．

例 4.6　(1)　関数 $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$

$f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$

$f(0)$ は極小値である．

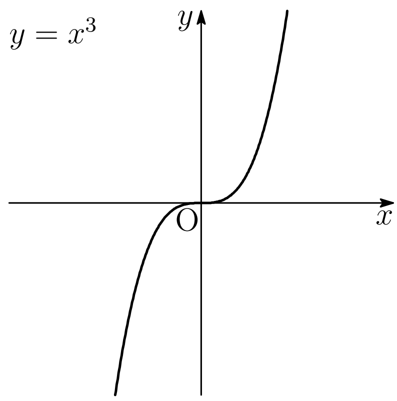


(2)　関数 $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$，$f''(x) = 6x$

$f'(0) = 0$，$f''(0) = 0$

$f(0)$ は極値ではない．



4.1.5　補充問題

1 p は 0 でない定数とする．放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，$y_1 y = 2p(x + x_1)$ であることを示せ．

2 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

3 曲線 $y = x^4 + ax^3 + 3ax^2 + 1$ が変曲点をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

【答】

1 $\left[\ 2yy' = 4p\right.$ より，$y \neq 0$ のとき，接線の傾きは $\left.\dfrac{2p}{y_1}\ \right]$

2 (1) $x = \sqrt{2}$ で最大値 2，$x = -1$ で最小値 $-\sqrt{3}$

(2) $x = \sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$x = -2$ で最小値 -2

3 $a < 0$，$8 < a$　[$y'' = 0$ とすると $2x^2 + ax + a = 0$，この x の 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよい]

4.2 いろいろな応用

4.2.1 方程式，不等式への応用

A 不等式の証明

応用例題 4.5 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$e^x > 1+x$$

考え方 $x>0$ のとき，関数 $f(x)=e^x-(1+x)$ の増減を利用する．

[証明] $f(x)=e^x-(1+x)$ とすると $\quad f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから $\quad f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$x>0$ のとき $\quad f(x)>f(0)=0 \quad \longleftarrow f(0)=e^0-(1+0)=0$

したがって $\quad e^x>1+x$ **[証終]**

練習 4.17 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $e^x > 1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

(2) $\log(x+1) < x$

$x > 0$ のとき，練習 4.17(1) の不等式から，さらに次の不等式が成り立つ．

$$e^x > \frac{x^2}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{e^x} < \frac{2}{x}$$

ここで，$x \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{x}{2} \longrightarrow \infty$，$\dfrac{2}{x} \longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

[注意] 一般に，自然数 n に対して，次が成り立つことが知られている．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

B 方程式の実数解の個数

応用例題 4.6 a を定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ．

$$e^x = ax$$

考え方　$x=0$ は解ではないから，$y=\dfrac{e^x}{x}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べる．グラフの漸近線にも注意する．

【解】 $x=0$ は方程式の解ではないから，$x \neq 0$ としてよい．

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とすると

$$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる．また

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小 e	$\nearrow$

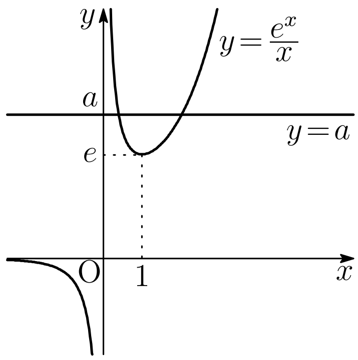
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to+0} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to-0} f(x)=-\infty$$

$x=-t$ とおくと，$x \longrightarrow -\infty$ のとき $t \longrightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{te^t}\right)=0$$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する．したがって



$a>e$ のとき 2 個

$a=e$，$a<0$ のとき 1 個

$0 \leqq a < e$ のとき 0 個

練習 4.18 a を定数とする．次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ．

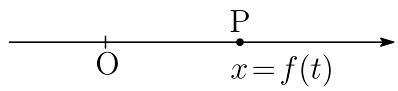
$$x^3 = a(x-1)$$

4.2.2　速度と加速度

A 直線上の点の運動

直線上を運動する点の速度と加速度について考えてみよう．

数直線上を運動する点Pの座標 x が，時刻 t の関数として



$$x=f(t)$$

と表されるとき，時刻 t から $t+\Delta t$ までの**平均速度**は，

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

で表される．

この平均速度において，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限値を，時刻 t における点Pの**速度**という．速度を v で表すと

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

である．点Pは，$v>0$ のとき数直線上を正の向きに動き，$v<0$ のとき負の向きに動く．また，v の絶対値 $|v|$ を**速さ**という．

さらに，速度 v の時刻 t における変化率を**加速度**という．加速度を α で表すと，次のようになる．

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

以上のことをまとめると，次のようになる．

速度と加速度

数直線上を運動する点Pの時刻 t における座標 x が $x=f(t)$ で表されるとき，時刻 t における点Pの速度 v，加速度 α は

$$\boldsymbol{v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\qquad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)}$$

例題 4.9 数直線上を運動する点Pの座標 x が，時刻 t の関数として，$x=2\sin(\pi t-a)$ で表されるとき，時刻 t における速度 v，加速度 α を求めよ．ただし，a は定数とする．

【解】　速度 v は　$v=\dfrac{dx}{dt}=2\pi\cos(\pi t-a)$

加速度 α は　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-2\pi^2\sin(\pi t-a)$

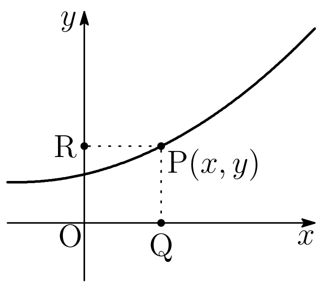
[注意] $\alpha=-\pi^2x$ とも表される．この点Pの運動を単振動という．

練習 4.19 地上から，初速度 v_0 m/秒 でボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$ で与えられる．ただし，g は定数とする．t 秒後におけるボールの速度 v m/秒 と加速度 α m/秒^2 を求めよ．

B 平面上の点の運動

座標平面上を運動する点 P の速度と加速度について考えてみよう．

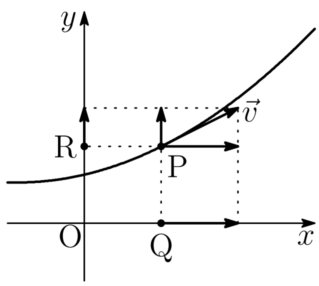
時刻 t における点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は t の関数となる．このとき，点 P から x 軸，y 軸に下ろした垂線を，それぞれ PQ，PR とすると，点 Q は x 軸上で，点 R は y 軸上で，それぞれ直線運動をする．したがって，時刻 t における



点 Q の速度は $\dfrac{dx}{dt}$，点 R の速度は $\dfrac{dy}{dt}$

である．これらを，それぞれ点 P の

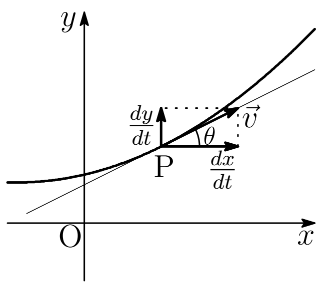
x 軸方向の速度，y 軸方向の速度といい，これらを成分とするベクトル



$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

を，時刻 t における点 P の**速度**という．

座標平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，



$$\tan\theta = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

である．

よって，速度 $\vec{v}$ の向きは，点 P の描く曲線の点 P における接線の方向と同じであることがわかる．

速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を，点 P の**速さ**という.
さらに，x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル
$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を，時刻 t における点 P の**加速度**という.
また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を，点 P の**加速度の大きさ**という.
これまでのことをまとめると，次のようになる.

速度と加速度

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が t の関数であるとき，
時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$，速さ $|\vec{v}|$，加速度 $\vec{\alpha}$，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\boldsymbol{\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\qquad |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right),\qquad |\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}$$

例題 4.10 座標平面上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として

$$x=a\cos\omega t,\quad y=a\sin\omega t\qquad (a,\ \omega\text{は正の定数})$$

で表されるとき，点 P の時刻 t における速さと加速度の大きさを求めよ.

【解】 点 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする.

$\vec{v}$ の成分は $\quad \dfrac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t,\ \ \dfrac{dy}{dt}=a\omega\cos\omega t$

よって，速さ $|\vec{v}|$ は

$$\begin{aligned}|\vec{v}|&=\sqrt{(-a\omega\sin\omega t)^2+(a\omega\cos\omega t)^2}\\&=\sqrt{a^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=aw\end{aligned}$$

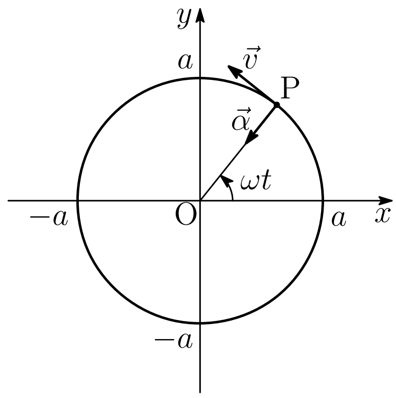
$\vec{\alpha}$ の成分は $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\cos\omega t,\ \ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-a\omega^2\sin\omega t$

よって $\quad \vec{\alpha}=-a\omega^2(\cos\omega t,\ \sin\omega t)$

したがって，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{\alpha}|=a\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}=a\omega^2$$

例題 4.10 の点 P は円 $x^2+y^2=a^2$ の周上を動く．この円運動の速さは $a\omega$ であるから一定である．このように，速さが一定の円運動を**等速円運動**という．
また，例題 4.10 では，$\vec{\alpha}=\omega^2(-x,-y)$ となる．このように，等速円運動する点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，P から中心に向かう向きである．



練習 4.20 時刻 t における点 P の座標が次の式で与えられるとき，$t=3$ における点 P の速さ，加速度の大きさを求めよ．

(1) $x=2t+1,\ y=t^2-4t$

(2) $x=2\cos\pi t,\ y=2\sin\pi t$

4.2.3 近似式

A $f(a+h)$ の近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

で定義される．よって，h が 0 に十分近い値のときは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$$

であると考えられる．すなわち，次のようになる．

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

これは，h が 0 に十分近い値のとき，$f(a+h)$ の値を h の 1 次式で近似した式となっている．

1 次の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h}$

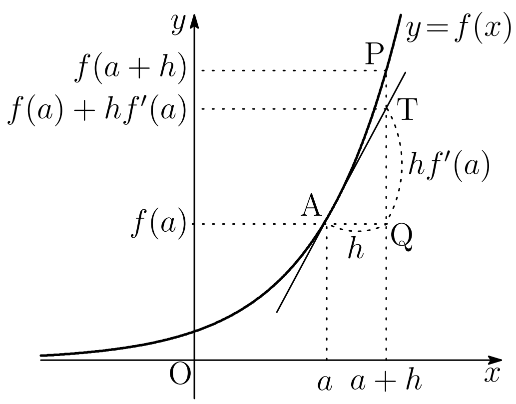
上の近似式の意味を，グラフで考えてみよう．

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

と表される．

$h\fallingdotseq 0$ のときは，右の図において，点 P の y 座標を点 T の y 座標で近似するということである．



例 4.7　$h\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式

$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$h\fallingdotseq 0$ のとき

$$\sin(a+h)\fallingdotseq \sin a+h\cos a$$

練習 4.21 $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1次の近似式を作れ．

(1) $\cos(a+h)$

(2) $\tan(a+h)$

B $x \fallingdotseq 0$ のときの近似式

前ページの1次の近似式で，とくに $a=0$ のときを考え，h を x におき替えると，次の近似式が得られる．

$x \fallingdotseq 0$ のときの1次の近似式

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x}$

例題 4.11 p を有理数とするとき，次の近似式を導け．

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1+px$$

また，この近似式を用いて，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を求めよ．

【解】 $f(x)=(1+x)^p$ について　　$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$

よって　　$f(0)=1$，　$f'(0)=p$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$$x \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \qquad (1+x)^p \fallingdotseq 1+px$$

また，$\sqrt[3]{1.006}=(1+0.006)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$$\sqrt[3]{1.006} \fallingdotseq 1+\frac{1}{3}\times 0.006=1.002$$

練習 4.22 $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ.

(1) e^x

(2) $\log(1+x)$

(3) $\dfrac{1}{1+x}$

練習 4.23 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ.

(1) $\sqrt[4]{16.1}$

(2) $\log 1.01$

(3) $\dfrac{1}{0.998}$

4.2.4 補充問題

4 座標平面上を運動する点 P の，時刻 t における座標が次の式で与えられるとき，加速度の大きさを求めよ．

$$x = a(\omega t - \sin \omega t), \quad y = a(1 - \cos \omega t) \qquad (a,\ \omega \text{ は正の定数})$$

5 球が毎秒 8cm^3 の割合で体積を増しているとする．時刻 t におけるこの球の半径，表面積，体積を，それぞれ $r\,\text{cm}$，$S\,\text{cm}^2$，$V\,\text{cm}^3$ とするとき，$r = 2$ のときの変化率 $\dfrac{dV}{dt}$，$\dfrac{dr}{dt}$，$\dfrac{dS}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

6 1 次の近似式を用いて，次の値の近似値を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで求めよ．ただし，$\pi \fallingdotseq 3.1416$，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7321$ を用いよ．

(1) $\sin 31^\circ$

(2) $\tan 1^\circ$

【答】

4 $a\omega^2$

5 $\dfrac{dV}{dt} = 8$ (cm^3/秒)，$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}$ (cm/秒)，$\dfrac{dS}{dt} = 8$ (cm^2/秒)

6 (1) 0.5151　(2) 0.0175

[(1) $\sin 31^\circ = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) \fallingdotseq \sin\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\cos\dfrac{\pi}{6}$　(2) $f(x) = \tan x$ とすると $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，$f'(0) = 1$，$f(0) = 0$ より　$\tan x \fallingdotseq x$]

4.3 章末問題

4.3.1 章末問題 A

1 次の曲線の，与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ．

(1) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$，点 $(2,\ 0)$

(2) $y = \tan x$，点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$

2 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ．

(1) $y = x^2 \log x$

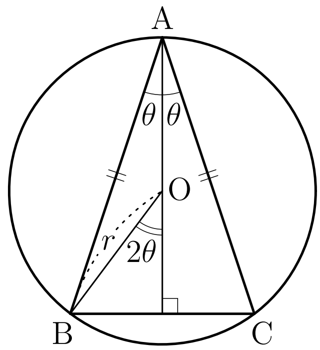
(2) $y = |x^3 - 3x|$

3 次の関数のグラフの概形をかけ.

(1) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

(2) $y = \sin 2x + 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

4 円に内接する二等辺三角形の中で，周の長さが最大になるものは正三角形である．このことを，円の半径を r，二等辺三角形の頂角の大きさを 2θ とし，周の長さ l を θ の関数で表すことによって証明せよ．



5 a を定数とする．曲線 $y = \dfrac{x}{x^2 + a}$ の変曲点の個数を，次の各場合について求めよ．

(1)　$a > 0$　　(2)　$a = 0$　　(3)　$a < 0$

6 $x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

(2) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$

4.3.2 章末問題 B

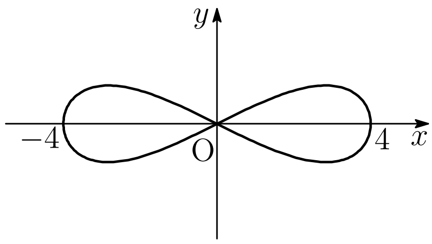
7 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の原点以外の任意の点 P における法線が x 軸と交わる点を Q とし，P から x 軸に下ろした垂線を PR とする．このとき，線分 QR の長さは一定であることを証明せよ．

8 2 つの曲線 $y=ax^2+b$，$y=\log x$ が，点 A$(e,\ 1)$ を共有し，かつ点 A で共通な接線をもつように，定数 a，b の値を定めよ．

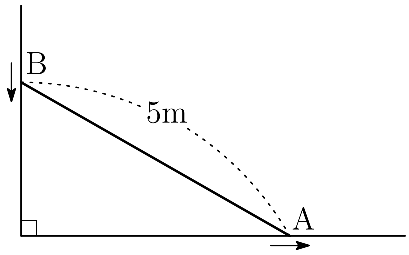
9 体積が一定である直円柱の表面積を最小にするには，高さと底面の半径の比をどのようにすればよいか．

10 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ のグラフを C とし，曲線 C の変曲点を A とする．曲線 C 上に A 以外の任意の点 P をとり，点 A について点 P と対称な点を Q とすれば，Q も曲線 C 上にあることを示せ．

11 座標平面上を運動する点Pの時刻tにおける座標が，$x = 4\cos t$，$y = \sin 2t$ で与えられるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における点Pの速さの最大値と最小値を求めよ．



12 地面に垂直な壁に長さ5mの棒を立てかけ，この棒の下端Aを，地面上を毎秒0.3mの速さで壁から垂直に遠ざける．棒の下端Aが壁から4m離れたときに，棒の上端Bが壁面上を動く速さを求めよ．



ヒント

9　体積を定数 k，底面の半径を変数 x として，表面積を x の関数で表す.

12　点Aを x 軸上，点Bを y 軸上にとり，$\mathrm{OA}=x$，$\mathrm{OB}=y$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=0.3$

【答】

1 (1) $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$，$y=-4x+8$　(2) $y=2x-\dfrac{\pi}{2}+1$，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{8}+1$

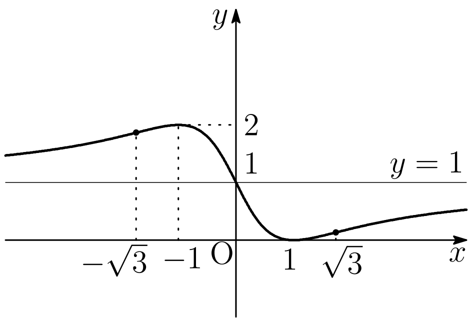
2 (1) $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$

(2) $x=-\sqrt{3}$，0，$\sqrt{3}$ で極小値 0，$x=-1$，1 で極大値 2

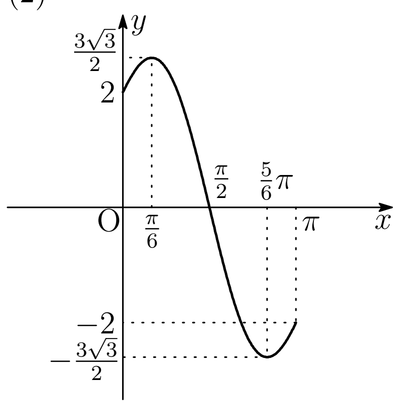
3 $\Bigg[$ (1) $y'=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$，$y''=-\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$　漸近線は直線 $y=1$

(2) $y'=-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$，$y''=-2\cos x(4\sin x+1)$ $\Bigg]$

(1)



(2)



4 $\Bigg[$ 図において　$\mathrm{AB}=2r\cos\theta$，$\mathrm{BC}=2r\sin 2\theta$ であるから

$l=4r\cos\theta+2r\sin 2\theta$，$\dfrac{dl}{d\theta}=-4r(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$ $\Bigg]$

5 (1) 3個　(2) 0個　(3) 1個　$\left[\ y''=\dfrac{2x(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}\ \right]$

6 $\left[\right.$ (1) $f(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とすると，$x>0$ のとき　$f'(x)>0$，$f(0)=0$

(2) $g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ とすると，

(1) の不等式より　$g'(x)>0$，$g(0)=0$ $\left.\right]$

7 ［点 P の x 座標を t とすると，法線の方程式は　$y=-2\sqrt{t}\,x+(2t+1)\sqrt{t}$］

8 $a=\dfrac{1}{2e^2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

［$f(x)=ax^2+b$，$g(x)=\log x$ とすると　$f(e)=1$，$f'(e)=g'(e)$］

9 2 : 1 $\left[\right.$ 底面の半径が x のときの表面積を $S(x)$ とする．

高さを h，体積を k とおくと　$k=\pi x^2h$，$S(x)=2\pi x^2+2\pi xh$

$S'(x)=\dfrac{2(2\pi x^3-k)}{x^2}$　　$S(x)$ は $x=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$ で最小となる $\left.\right]$

10 ［A の座標は $(-a,\ 2a^3-3ab+c)$，A が原点に重なるように曲線 C を平行移動させた式を $y=g(x)$ とすると　$g(x)=f(x-a)-(2a^3-3ab+c)=x^3+3(b-a^2)x$

よって，$g(-x)=-g(x)$ が成り立つから，移動後の曲線は原点について対称］

11 最大値 $2\sqrt{5}$，最小値 2 $\left[\right.$ 速さは $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-4\sin t)^2+(2\cos 2t)^2}=$

$\sqrt{4\{4\sin^2 t+(1-2\sin^2 t)^2\}}$ $\left.\right]$

12 0.4m/秒 $\left[\right.$ 座標平面上で，点 A を x 軸上，点 B を y 軸上にとり，OA $=x$，

OB $=y$ とすると　$x^2+y^2=5^2$　両辺を t で微分すると　$x\dfrac{dx}{dt}+y\dfrac{dy}{dt}=0$

これに，$\dfrac{dx}{dt}=0.3$，$x=4$，$y=3$ を代入すると　$\dfrac{dy}{dt}=-0.4$ $\left.\right]$